エントロピー生成とvan Hove limit

京都大学数理解析研究所　小嶋　泉

1. 問題の位置付け

この研究会の目指す目標とは何かを考える時まず思い浮かぶのは、《From Being to Becoming》という標語である。Prigogine[1]等によってジャーナリスティックに喧伝されたあとでは多少“手垢のついた”感は否めないとしても、科学によって緒かれつつある自然・宇宙のダイナミックな描像に照らすならば、この言葉の魅力に深い根拠があることは否定しえない。ただし、標語化・単純化には誤解の危険が伴うのが常であり、“From Being”という表現一つとってみても、確かにそこには幾つもの落とし穴がありうる。もしその意義を〈反復的事象の法則性〉に係わる“Beingの論理”からの離脱ということに見出して、これまでの“Beingの物理”を一面的に否定し、法則性・不変性から切り離された次元で“Becoming”を“理(?)解”しようとする立場ととるならば、そうした文脈での“Becoming”の領域はそもそも科学研究の対象とはなりえない恐れがある。ここでは、“Being”と“Becoming”を二者択一的に対立させるのではなく、もっと素直に“from Being”＝“based upon Being”と了解して、マクロ・レベルでの“Becoming”の物理をミクロ・レベルでの“Being”の物理からどうderiveすべきかという物理学のorthodoxな立場から出発したい。この観点から、我々の研究の目標及びそれへ向けての‘戦略’を、とりあえず以下のような形で図式化してみよう。

I)“Being”における階層移行の論理

＝力学系的記述の中に含まれる複数の階層の存在と、

階層間の相互連関・相互移行の“共時的”・論理的関係の解明

与えられた1つの物理系の標準的な力学系的記述の中に、‘暗黙の裡に’既に複数の階層の存在が前提されてしまっていること、及び、それらがobservable・dynamics・state等の基本概念とどう関係するかについては、’86年の研究会報告[2]で多少議論した。ここで抽象レベルの議論を繰返すことはなるべく控えたいが、突き詰めると現象とその法則的記述、法則と境界条件という形での自然の理論的認識に纏わりつく二(or 多)元論的性格に帰着する問題である。これを、《‘不変的法則’に支配されたミクロゆらぎの反復的運動のレベル》と、そのゆらぎを内包しそれに駆動されつつ形成される《多様な秩序構造＝安定構造＝‘境界条件’が相互に移り替わる可変的・非反復的・マクロレベル》の相互関連・移行の問題と見て、より対象系に即した柔軟な理論展開の方向を探るなら、可逆力学系としての“Being”の構造に内在する“共時的”な階層移行の論理自体の中に、不可逆的・“通時的”な構造移行過程としての“Becoming”が、既にそのvirtualな形において捉えられるのではないだろうか？そこで

II)“Becoming” virtually contained in“Being”、

という見方を、我々の一つの作業仮説に採ろう。“Being”の論理を深く掘り下げて移行の‘前後’に横たわるgapの所在を明らかにするならば、問題の焦点は、virtualなものがrealizeされる‘一点’＝gap＝realization processに凝集されるに違いない。その解

明に正面から取組むことによって“Becoming”の過程の合理的把握が可能になるだろうと期待することは、orthodoxな、むしろ常識的というべき考え方ではないだろうか？

III) 非平衡定常状態とエントロピー生成

この目的で、定常性から非定常性へ、可逆性から不可逆性へ、の移行の接点の所を考察することは明らかに重要な鍵となるだろうが、その具体化のため、自然に遍ねく存在する動的平衡・構造安定性[3]という現象に注目しよう。現象論的・熱力学的レベルの記述から一歩踏込んで、ミクロ・レベルとの本質的係わりにおいて（無限自由度の）量子系の非平衡定常状態の問題としてこれを捉え直すなら、その多面的構造はそれ自体“Being”の物理として大きな理論的興味の対象となりうる。しかも、その力学的法則性・定常性・秩序構造（＝情報論的側面）それ自身に、“ゆらぎ”・散逸性の側面が不可避的なものとして伴っており、その“ほんの目と鼻の先”には、構造移行の不可逆的過程＝“Becoming”が位置している。こういう事情の故に、非平衡定常性の問題一《非平衡定常状態の概念を理論的にどう定式化すべきか、それが持つ散逸的・熱力学的・情報論的性格の量的表現としてのエントロピー生成をミクロの量とどう結びつけるべきか、等々》一は、“Being”の論理の“Becoming”のそれへの合理的接続に際して、一つの普遍的典型例の役割を果すと期待される。次節以降の議論とのつながりのために、問題を次の表のような形に整理しよう。

	定常性＝基準状態		非定常過程＝state changing process	
局所平衡系	・QFT at T＝0° K [vacuum]	⟶	散乱理論	《ミクロ》
(entropy	↓＜階層移行＞	↙		
生成＝0)	・QFT at T≠0° K [KMS state]	⟶	応答理論	《local》
	↓＜階層移行＞	↙		
非平衡系	◎非平衡定常状態	⟶	構造移行過程＝構造形成・進化	
(entropy	[＝エントロピー生成極小(?)			《セミマクロ
生成≠0)	＝動的平衡性・構造安定性]			～マクロ》

ここで、横向きの矢印⟶は状態遷移過程への‘微小’摂動的移行で、（‘エルゴード的’条件下に）長時間極限で元の基準状態へ戻る[e.g.平衡への回帰]ことを示す。縦or斜の矢印↓＜階層移行＞↙は、上の行の状態遷移過程が‘無限’に反復した結果として実現される一種の‘相転移’であり、他方、下の行は上の行を特殊ケースorミクロの部分過程として含んでもいる。

IV) 可逆力学系から不可逆定常過程への移行

この表の局所平衡系（＝エントロピー生成なし）のところまでは、一応“standard”な物理理論の枠組があると言ってよいだろう。しかし、非平衡系についてestablishされた理論は、まだ現象論と呼ぶべき段階だと思われる。次節では、非平衡過程におけるエントロピー生成の概念に一つの定式化を与え、それを踏まえて、第3節で、力学系の

の立場から非平衡定常状態をどう捉えるべきかを議論する。ただし、力学系の枠組では、非平衡定常状態の定常性をその散逸性と矛盾なく捉え切るには不充分であり、少なくとも、定常的な散逸過程、つまりMarkov的な不可逆過程へ移行することが必要となる。この可逆力学系を非平衡不可逆過程に転化させる階層移行・構造移行の過程として、第4節ではvan Hove limitの本質的な役割を考察する。

V)構造移行＝非定常不可逆過程の理解を目指して

このvan Hove limitの意味や、上の表の下段右側の構造移行過程、即ち、我々が目指している“Becoming”、をより自然な形で理解しようとすると、時間の階層的構造及び複数の時空階層間の相互の連関と移行が問題になってくる：ミクロ系にとっての“無限”の時間間隔($t_i \to -\infty, t_f \to +\infty$)は、マクロ・レベルではほんの短い有限の時間経過に過ぎず、この‘幅のあるマクロ時間’をパラメータとしてもつ新たな高次レベルの運動が、初めの力学系をその中に‘入れ子’の形で取込みつつ再び開始される［これは、上表の“↓＜階層移行＞”の所ではいつも繰返されるパターンである］。第5節では、平衡・非平衡の相互関係、可逆と不可逆、非平衡性と不可逆性との相互の結びつきにおいて、この問題の考察に必要な若干の論点を整理してみたい。

2. 可逆力学系におけるエントロピー生成と非平衡定常状態への移行

さて、前節での一般論をもう少し具体化するためには、エントロピー及びエントロピー生成に関するPrigogineの主張[3]を、我々の立場から少し整理し直しておくことが有用と思われる。

	エントロピー	エントロピー生成	エントロピー生成の変分／変化率	
純粋状態	S≡0			
混合状態	S＞0	平衡：＝0	平衡→定常	［熱力学的分岐］
		非平衡：＞0	非定常－平衡への回帰	
非平衡過程			非平衡定常：極小	［非熱力学的分岐］
			非定常－移行過程：極大	

これは、内容的には前節の表と殆ど同じものだが、エントロピーの言葉で簡潔な分類基準を与えている点に、物理理論としての重要な意義がある。しかし、翻ってその“エントロピーの言葉”とは何であろうか？現象論的な非平衡熱力学[3]の枠内では、この図式の内容のかなりの部分が‘天下り的に’前提されるのだが、さてひとたびミクロ量子系からその前提を基礎付けようとした途端、そもそものエントロピー生成（だけではな

くエントロピーそのものも）の定義からして、すべてが明晰判明ではなくなってしまう。実はこれは、エントロピー・エントロピー生成の概念がミクロ・マクロの極限移行の問題に本質的に係わっていることに由来し、上の図式検証の問題が階層移行に関する考察にとって有益な手掛りとなり得るのは、逆説的だがエントロピー概念のもつこの非自明性の故である。Prigogineの主張を確立済みの結論として鵜呑みにするのではなく、これをあくまで我々にとっての暫定的な一つの出発点・手掛りとして、エントロピー概念を検討してみよう。

I）エントロピーのconventionalな定義 ＜$S=-k_B \mathrm{Tr}\,\rho \log\rho$＞ の問題点

a）extensive quantityとしてのエントロピーは自由度の数に近似的に比例して増大するので、一般に無限系では$S=\infty$。

→ 物理的な量はintensiveなentropy density［又は‘coarse-grained entropy’と呼ぶべきmacroscopic extensive quantity］。

b）上の“trace formula”の背後には、物理量のalgebraの既約（真空）表現が存在して［そこでは‘すべての’自己共役演算子が物理量］、‘任意の’物理的状態がその中でdensity matrix ρを用いて書き表わせるとの暗黙の前提がある。しかし、それが常に成立つのは有限系のみで、無限系には適用できない。例えば、温度の異なる状態は一般に“ユニタリー非同値”であり、与えられた温度Tの状態を別の温度状態（例えば、真空$T=0°$ K）の空間に属するdensity matrixで書き表わすことは不可能。

c）可逆力学系の時間発展は、“ユニタリー”（正確には、自己同型変換）なため、上に定義されたエントロピーは、常に一定値を取る。従って、この量に基づいてエントロピー生成を記述することは不可能である。では、久保の線型応答理論[5]において、輸送係数が計算され、従って、熱の発生＝エントロピー生成を伴う散逸的過程が（近似的にもせよ）確かに記述されていることを、どう考えるのか？散逸性の由来は、ひとえに線型近似したところに求められるのか、それとも、近似操作そのものは、本質的でないのか否か？

II）力学系の非線型応答理論からのアプローチ

以下では主として上記 b),c)の問題に焦点を当て、（無限自由度の量子論的）力学系の非線型応答理論の枠組に基づいて、エントロピー生成の一般的・合理的定式化の問題を考察する（概念的な側面の議論に重点を置き、technicalな細部の問題は、文献[6]に譲る）。力学系を基礎に採るのは、前節のI)、II)の視点に立って、可逆なものから不可逆なものを、力学系から散逸過程を、如何に理解するかというBoltzmann以来の“伝統的”思考に沿って、議論の出発点をひとまず設定するという意味である。たとえ出発点が不可逆的散逸系であっても、dilationとして知られる方法によれば、その系を可逆力学系の中に部分系として埋め込むことが一定の条件下では常に可能であり、それが満たされる限り、自然の“窮極”レベル（そういうものがあると仮定して）が可逆力学系か不可逆的散逸系かの問いに対する答のchoiceとは一応独立に、力学系的記述から始めることの一般性は保証される。恐らく宇宙論まで考慮するときには、ミクロ系＝可逆力学系という我々の抜き難い‘偏見’を支えるこの前提条件自体の当否を問題にしなければ

ばならないだろうが、その問題の立入った検討のためにもとりあえず議論を展開してみる必要がある。

次に、応答理論とは、“無限の過去”に平衡にあった系が外力に対してどんな時間的応答を示すかを論ずるものであるが、応答理論とその非線型versionを議論の枠組とする理由は、直接には上記c)の文脈に基づく。線型応答理論[5]には、輸送係数の概念とその正値性の結論はあるがエントロピー生成の概念は明示的ではなく、他方Prigogineその他の非平衡熱力学・散逸構造論[1,3]には、エントロピー生成の‘概念’はあるけれども、それをミクロの‘基礎理論’へ結びつける＜定義＞がない。我々の結論では、ミクロ理論に基づくエントロピー生成の定義とその正値性＝散逸性の証明は線型近似なしに可能であり[6]、従って線型応答理論のこの帰結自体は、近似故のaccidentではなかったことになる。他方、非平衡定常性とMarkov的な不可逆過程への移行のためには、線型性が重要な役割を果す。むしろ、線型応答理論やOnsager達の線型不可逆過程の議論は、この事を発見法的な形で非常に巧妙に取込んでいたものと見るべきだろう。

そこで、非線型応答理論の枠組を無限自由度の量子論的力学系にも適用可能な形で簡単にみておこう。

Nonlinear Response Theory:

- $\mathfrak{A}$:系を記述する物理量のalgebra
- $\alpha_t (t \in \mathbb{R})$:系のdynamicsを記述する$\mathfrak{A}$上の１係数自己同型群
- ω_β ：量子論的力学系$(\mathfrak{A}, \{\alpha_t\})$の温度$T = 1/k_B\beta$での平衡状態（＝KMS 状態）

↓

- GNS 表現 $(\mathfrak{H}, \pi, \Psi;\ U_t = \exp itH_\beta)$:

$$\omega_\beta(B) = \langle \Psi, \pi(B)\Psi \rangle \qquad (B \in \mathfrak{A})\ ;$$

$$\mathfrak{H} \equiv \overline{\pi(\mathfrak{A})\Psi} \qquad \text{(cyclictity)}\ ;$$

$$\pi(\alpha_t(B)) = U_t \pi(B) U_{-t}\ ; \qquad H_\beta \Psi = 0$$

- “外力” $X(t) \equiv (X_i(t))$による系の摂動：

couple する系の物理量を$\mathbb{A} = (A_i)$として　$H_1(t) \equiv -\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}(t) \equiv -\Sigma A_i X_i(t)$　(1)

（▼“どういう物理量が外力とcoupleし得るか？”

→“Macro-observable”の特徴付け→不可逆過程への移行の問題）

- perturbed dynamics $\alpha_{t_1, t_2 : X}$:

$$\frac{d}{dt}\alpha_{t_0, t : X}(B) = \alpha_{t_0, t : X}([i(H_\beta + H_1(t)), B]) \tag{2}$$

$$\alpha_{t_0, t = t_0 : X} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} \quad \text{(initial condition)}$$

$$\Rightarrow \qquad \pi(\alpha_{t_1, t_2 : X}(B)) = \mathcal{U}(t_2, t_1; X)^* \pi(B)\, \mathcal{U}(t_2, t_1; X), \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(t_2, t_1; X) = e^{-it_2 H_\beta}\, U(t_2, t_1; X)\, e^{it_1 H_\beta}, \tag{4}$$

$$U(t_2, t_1; X) = T\exp i\int_{t_1}^{t_2} dt\, \pi(\alpha_t(\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}(t))). \tag{5}$$

III) エントロピー生成と相対エントロピー

上のc)で見たように我々の力学系の議論の枠内では、エントロピー生成をエントロピーの時間微分として直接に定義する訳にはいかない。以下で我々は、エントロピー生成を捉えるために、2つの状態間のズレ［つまり、或る種の‘差分’］を測る相対エントロピーの概念に着目し、ミクロ長時間（＝マクロの‘一瞬’）に亘る単位時間当りでの相対エントロピーという形で、‘エントロピーの時間微分’の意味を解釈し直すことにする。これは、一見ad hocな操作に見えるかもしれないが、物に即して考えれば決してそうではないことがわかるだろう。それは、（エントロピー及びエントロピー生成の概念に本来伴う）ミクロ―マクロ間階層移行を既にそれ自身の定義の裡に（部分的に）取込んだ形での、微分概念の自然な拡張を与えており、ミクロ理論からマクロの観測可能量を抽き出すときには常に現れる‘物理的無限小・無限大’の扱いの一例にほかならない。‘物理的無限’などという‘曖昧な’概念は困るというのなら、例えば、ミクロの可逆力学系としての場の理論の散乱振幅［＝ミクロ的“無限の過去”$t_i \to -\infty$から“無限の未来”$t_f \to +\infty$への状態遷移］から、マクロ的確率事象に係わる散乱断面積の概念［＝単位流束単位マクロ時間当りの散乱事象数］がどう定義されたかを振返ってみればよい、類似の‘操作’が必ずやそこに見出されるに違いない。

さて、その相対エントロピー$S(\phi \mid \psi)$の定義は次の様に与えられる[4]：

0) density matrix ρ, σに対しては

$$S(\rho \mid \sigma) = \mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\sigma)$$

▼ $S(\rho \mid \rho') = \mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\rho') = -\mathrm{Tr}\,\rho\,\Delta(\log\rho)$
と書くと差分との関係がよく分る。

▼ b)で問題にした“density matrixでは表わせない”状態ϕ、ψに対しても相対エントロピー $S(\phi \mid \psi)$が一般的に定義されるということが本当は大事だが、technical detailに立入る必要があるので、これについては、文献[4,6]に譲る。

i) 正値性 $S(\phi \mid \psi) \geqq 0$
　等号成立 $\Leftrightarrow$ $\phi = \psi$

ii)同時凸性： $S(\sum_i \lambda_i \phi_i \mid \sum_i \lambda_i \psi_i) \leqq \sum_i \lambda_i S(\phi_i \mid \psi_i)$
　$(0 \leqq \lambda_i \leqq 1,\ \sum_i \lambda_i = 1)$

iii)下半連続性（略）

iv)加法性：$S(\phi_1 \otimes \phi_2 \mid \psi_1 \otimes \psi_2) = S(\phi_1 \mid \psi_1) + S(\phi_2 \mid \psi_2)$

v)完全正写像Λに対して $S(\phi \circ \Lambda \mid \psi \circ \Lambda) \leqq S(\phi \mid \psi)$
（後述）

▽相対エントロピーに基づくエントロピー生成記述に対する一つの“状況証拠”：

Spohn-Lebowitz［7］:平衡への回帰における量子Markov過程でのエントロピー生成とその正値性

Λ_t：量子 Markov過程を記述する完全正（CP)写像のなす1径数半群

ρ_β ： Gibbs平衡状態　　$\Lambda_t(\rho_\beta) = \rho_\beta$

ρ ：‘出発点’の非平衡状態

→エントロピー生成 $P_t = \underline{-(d/dt)S(\Lambda_t \rho \mid \rho_\beta)} > 0$　　[∵ v)]　　(6)

$\|$

reservoir とのエントロピー授受を除外した
<u>系内での net entropy production</u> (∵ balance equation)

ただし、この例は、
'無限の未来' に系が到達する定常状態が唯一つ（力学系的）Gibbs平衡状態（= detailed balance の成立）しかないようなergodicな状況＝Ornstein-Uhlenbeck定理の成立、における散逸的量子確率過程
であり、先の Prigogine の図式でいえば
'熱力学的分岐' の領域内での 'downhill process'
= <非平衡→平衡>＝秩序崩壊過程＝平衡への回帰
の話である。我々が考えようとしているのは、これとは対照的に、
'無限の過去' での平衡系（'熱力学的分岐'）から出発して
'非熱力学的分岐' に属する非平衡定常状態を目指す 'up-hill process'
＝<平衡→非平衡>＝高次秩序構造形成過程＝平衡からの離脱
であり、時間の向きが（見掛け上）逆であることは、（特に熱力学第２法則との関連で）充分注意を要する。

さて、$t = t_0$（後で→$-\infty$）において $\phi_{t=t_0} = \omega_\beta$ = Gibbs平衡状態にset upされたシステムに外力$X(t)$の作用が惹き起こす状態変化 $\phi_{t=t_0} \to \phi_t = \omega_\beta \circ \alpha_{t_0, t; X}$ に対する相対エントロピーを計算すると、次のgeneralized Ichiyanagi's formula[8,6]が得られる:

$$S(\phi_t \mid \omega_\beta) = \beta \int_{t_0}^{t} ds\ \underline{\phi_s(\delta(A_i))}\ X_i(s) \geq 0 \qquad (7)^{*)}$$

$\|$

$$<\Phi_s, [iH_\beta, \pi(A_i)]\Phi_s> \quad ; \qquad \Phi_s \equiv \mathcal{U}(s, t_0; X)\Psi$$

↓

$$P_t \equiv d/dt\ S(\phi_t \mid \omega_\beta) = \beta \sum_i \phi_t(\underline{J_i})\ X_i(t) = \beta \sum_i <J_i>_t\ X_i(t) \qquad (8)$$

$\|$

$\delta(A_i)$: conjugate current flux

(8)の右辺とOnsagerの式：(conjugate flux)×(外力)＝"散逸関数"、との比較、及び 'up-hill'、'downhill'の対比を踏まえた上での**)、(6)、(8)式の比較は、(8)のP_tをエントロピー生成と見る可能性を示唆する。fluxに対する線型近似

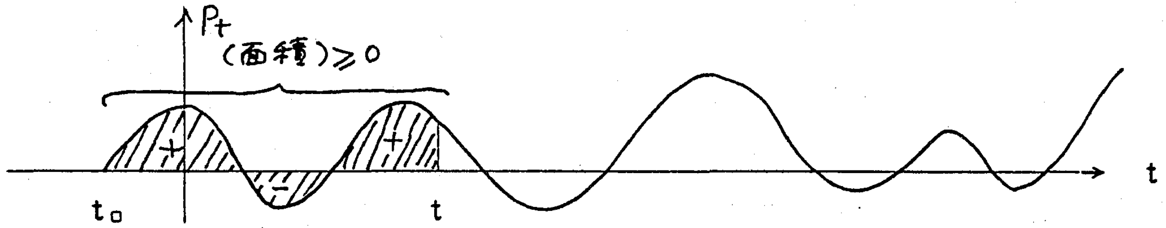
$$<J_i>_t = \sum_j L_{ij}(t) X_j(t)$$

の下では、P_tの正値性は、L_{ij}の（行列としての）正値性と同値であり、それは、'相反性' を帰結する：

脚注*) 上では説明をサボったが、この式の無限系への拡張には、荒木、Uhlmannによる相対エントロピーの一般的定式化が重要な役割を演じている。文献[6]参照。
**) (6)、(8)の符号の違いは、この '向き' の違いを反映するものである。

$L_{ij} = L_{ji}$。

ただし‘残念’なことに、(6)とは異なって(8)式に(v)を使う余地はなく、また、(7)の積分の下端＝始時刻t_0が固定端であるため、相対エントロピーの正値性だけではその integrand $P_t = d/dt\ S(\phi_t | \phi_{t=t0} = \omega)$の正値性を導くことはできない：



ここで、X(t)の符号を逆転することを考えると、その“瞬間” $P_t = \beta\,\phi_t(J_i)\ X_i(t)$は符号を変えるが、$S(\phi_t | \phi_{t0} = \omega) = \beta \int_{t_0}^{t} ds\ P_s \geq 0$ ゆえ、P_t は大きく負にはなりえないことがわかる。これは、ル・シャトリエ＝ブラウンの法則の一つの表現であり、動的平衡性・構造安定性と解釈してよいものだろう。恒星進化、化学反応系、生物代謝系、地球環境、等々において既に知られている非平衡定常状態の動的平衡性とは、本来、“流れ”の存在下での定常性であり、そこでの‘流れ’＝（対象系にとっての）‘外力’&（系の）応答とは、必然的にゆらぎを伴うものであるが、全体的構造の定常性の中では、このゆらぎは‘抑え込まれ’、或いは、むしろ全体的秩序の維持に寄与していて（negative feedback）、‘臨界点’に達するまでは、決して表面化しないものである。非平衡定常状態というものがそういう本質をもつのだとすると、上の(8)式 $[P_t = \beta \times \phi_t(J_i)\ X_i(t)]$ の形では、実はミクロの細かいゆらぎまでを“見過ぎて”いるということになる。つまり、非平衡定常性を示す全体的秩序のマクロ・レベルとそれを内部で支えているミクロの運動・ゆらぎのレベル、という複数の階層の区別とその間の移行関係という第1節I)の議論が、まさしくここで問題になる。そのためには、まず、外力X(t)の特徴付けを与えておく必要がある：

IV) 概周期的な外力X(t)

線型応答理論では、通常、外力X(t)として周期的関数を考えるが、もしこの外力を“完全に”ランダム、即ち“noise”にしてしまうと、確率過程（＝散逸過程）の見方に移行することになる。“完全に”規則的なもの＝力学系的世界と“完全に”ランダムなもの＝統計力学的世界は、これまで物理学が得意としてきた二大領域であるが、今ここで我々が議論している内容は、この両極端が、どのような形で相互に結ばれ相互に移行し合うのか？という問題に本質的に係わっている。そうだとすると、系にcoupleさせる外力X(t)も、ここでの文脈にふさわしい仕方で、この両極端をうまく内挿するように選ばなければならない。そういう意味で、秩序性の代表としての周期的関数とランダム性の代表としての“noise”との丁度中間[*)]に位置する関数のクラスとして、概周期的関数を考えよう[9,6]。

---

*)次ページ脚注へ。

a）概周期性の定義

$X(t)$：概周期的［1次元可換群Rの場合］

$\Leftrightarrow$ $X(t)=\Sigma a_n e^{i\omega_n t}$ ［Cf. $\omega_n=n\omega$となるωが存在すればX：周期的］

$\Leftrightarrow \{X_\lambda : \lambda\in R\}$：ノルム$\|\phi\| \equiv \sup|\phi(t)|$に関してprecompact

ただし、$X_\lambda(t)\equiv X(t-\lambda)$

$\Leftrightarrow\cdots$

b）“hull” of $X(t)$: $M_X\equiv\overline{\{X_\lambda : \lambda\in R\}}$ ：compact可換群 (9)

（＝高々可算個のtorus Tの直積）

・$\sigma_t(X_s)\equiv X_{s-t}$を$M_X$上に拡張：$\sigma_t(\xi)\equiv\xi_{-t}$、すると$\sigma_t$は$M_X$上のergodic flow

・M_X上の連続関数$\hat{X}$が一意的に存在して $X(t)=\hat{X}(\xi^{(0)}_{-t})$ ただし、$\xi^{(0)}_{-t}\equiv X_{-t}$ (10)

・μをM_X上のHaar測度とすると、L^1関数Gに対してσ_tのergodicityより

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\int_S^T dt\, G(\xi_{-t})=\int_{M_X} d\mu(\xi)G(\xi) \tag{11}$$

3．“階層移行”に基づく非平衡定常性の定式化と平均エントロピー生成の定義

さて、前節に述べた階層分離とその相互の移行関係の視点及びそれを具体化する概周期関数の概念を用いて、正定値なエントロピー生成の定義を見つけよう。非平衡定常性の問題は、その定義と密接不可分の関係にある。

非平衡性と定常性のうち、まず定常性の実現のためには、

・t_0(＝initial time)-dependence をなくすこと

［通常は、“adiabatic switching : $t_0\to-\infty$”として］

・“final time” t に関する不変性

［通常は、“long-time average”として］

が要求される。非平衡性の問題は後回しにして、天下り的ではあるがI.O.-Hasegawa-Ichiyanagi[6]の結果をまず見よう。

I)平均エントロピー生成の定義

平均エントロピー生成 $\overline{P}$

$$\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}dt\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0}dt_0\,\omega_\beta(\alpha_{t_0,\,t+t_0;X}(J))\cdot X(t)$$

脚注*)規則性とランダム性の中間に現れるものは、一般にその何れにも帰着し切れない‘複雑性’であり、例えばSchrödinger operatorの外場による摂動の場合でも、スペクトルの変化は、random noiseの場合に見られる‘motional narrowing’と或る種の安定性に比して、概周期的摂動の場合、非常に複雑な影響が現われることが知られている。

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} dt_0\ S(\phi_{T_n+t_0} \mid \phi_{t_0}=\omega_\beta) \geqq 0 \tag{12}$$

ただし、

▼ $\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} dt_0$ ：“$t_0\to-\infty$”の一般化　“$t_0\to-\infty$”の極限が存在しない場合でも、［概周期性 → ergodicity］により常に極限確定

▼ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_{0}^{T_n} dt$ ：“final time average”　“$T\to\infty$”の適当な部分列$(T_n)_n$をとって極限存在，（一般的には）極限は非一意的（Markov−角谷の定理）.

↕

複数の非平衡定常状態の存在

上の形のままでは、依然、単なる技術的な極限操作の問題だけが表立っているように見えて、その平均エントロピー生成 $\overline{P}$ の定義と正値性や、更に、非平衡性、定常性との本質的・一般的な関連が十分には読取れない。そこでこれを、もっと階層相互の関係が見易くなるような形に書き直すことにする。

II)合成系＝（外力＋対象系）への対象系の埋め込み

そのessenceは、Bellissardによる方法[10]を用いれば次の形に整理できる：

i) Time-dependent system を（時間依存性の起源になっている自由度の運動まで取入れた‘全体系’としての）time-independent systemに埋め込んで考えることによって、時間依存系の話を時間に依存しない系に帰着させるやり方（散乱理論のcontextでは、A. Inoue; Howland;Yajima等による）。これは、redundantな変数の導入とそれに付随する拘束条件によって、複雑な系をその‘隠れた対称性’に基づいてcontrolするという、ゲージ理論で周知の一般的方法の特殊例である。

ii) 概周期的な外力$X(t)$のhull M_Xとその上のHaar measure μの活用。

・合成系の物理量：$\mathcal{B}\equiv\mathcal{A}\otimes C(M_X)=C(M_X,\mathcal{A})$

・摂動項：　$-\mathbb{A}\cdot X(t) = -\mathbb{A}\cdot\hat{X}(\xi^{(0)}_{-t}) = -\Sigma(A_i\otimes X_i)(\xi^{(0)}_{-t})$

$\alpha_{t_1,t_2:x}$はM_X上に（連続的に）拡張可能

$$M_X \ni \xi \longmapsto \alpha_{t_1,t_2:\xi} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$$

$$\alpha_{t_1,t_2:\xi}\circ\alpha_{t_2,t_3:\xi}=\alpha_{t_1,t_3:\xi} \qquad \text{(cocycle条件 or chain rule)}$$

$$\alpha_{t_1,t_2:\xi}=\alpha_{t_1+\lambda,t_2+\lambda:\xi_\lambda} \qquad \text{(covariance condition)}$$

・合成系$\mathcal{B}$上の時間発展を $(\beta_t(\hat{B}))(\xi)\equiv\alpha_{0,t:\xi}(\hat{B}(\xi_{-t}))$ と定義すると、これは$\mathcal{B}$上の１径数自己同型群としてtime-indep.dynamicsを与える：

$$\beta_s\circ\beta_t=\beta_{s+t} \tag{13}$$

ここで、M_X 上のHaar measure μのergodicityを用いると

$$((\omega_\beta\otimes\mu)\circ\beta_t)(\hat{B}) = \int d\mu(\xi)\,\omega_\beta(\beta_t(\hat{B})(\xi))$$

$$=\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0}dt_0\,\omega_\beta\,(\alpha_{t_0,\,t+t_0;\,X}(\widehat{B}(X_{-t-t_0})))\qquad(14)$$

即ち、μの役割はinitial-time averageをとることと同等である（以下[11]に基づく）。Haar measure μの不変性により、M_Xのtime flowσ_tは Hilbert空間$L^2(M_X,\mu)$上の１径数ユニタリー群V_tによって

$$(V_t\psi)(\xi)\equiv\psi(\xi_{-t})\qquad\psi\in L^2(M_X,\mu)$$

$$V_t\equiv\exp(-it\Delta)$$

と表現される。$C(M_X)$の$L^2(M_X,\mu)$上での掛け算演算子による表現π_μ

$$(\pi_\mu(f)\psi)(\xi)\equiv f(\xi)\psi(\xi)\qquad f\in C(M_X),\ \psi\in L^2(M_X,\mu)$$

を用いると、$\mathcal{B}$及びβ_tはHilbert空間 $\mathfrak{h}\otimes L^2(M_X,\mu)=L^2(M_X,\mathfrak{h};\mu)$上に

$$(\pi\otimes\pi_\mu)(\beta_t(\widehat{B}))=e^{itH}(\pi\otimes\pi_\mu)(B)e^{-itH}$$

$$H=H_\beta\otimes 1+\mathbb{J}\otimes\Delta-\mathbb{A}\otimes\mathbb{X}\qquad(15)$$

という形で表現される。右辺の$1\otimes\Delta$は、時間軸の等質性を回復させる‘外力系’のkinetic termである。これを用いてエントロピー生成の考察を続けよう。まず、

・$\omega_\beta\otimes\mu$: decoupled dynamics $\alpha_t\otimes Id_{C(M_X)}\equiv\widehat{\alpha}_t$ についてKMS状態

及び

・coupled dynamics β_t は、$H-H_\beta\otimes 1=\mathbb{J}\otimes\Delta-\mathbb{A}\otimes\mathbb{X}$ を摂動項として

　$\widehat{\alpha}_t$ を perturb したもの

ということに注目すると、前節の$\mathfrak{A}$上での相対エントロピーに関するgeneralized Ichiyanagi's formula を、$\alpha_{t,t_0;X}\to\beta_t$、$\omega_\beta\to\omega_\beta\otimes\mu$、$\phi_t\to\omega_\beta\otimes\mu\circ\beta_t$ という置替えでこの合成系 $\mathcal{B}$ に適用することができて、

$$S(\omega_\beta\otimes\mu\circ\beta_t\,|\,\omega_\beta\otimes\mu)$$
$$=\beta\int_0^t ds(\omega_\beta\otimes\mu\circ\beta_s)([iH_\beta\otimes 1,-\mathbb{J}\otimes\Delta+\mathbb{A}\otimes\widehat{\mathbb{X}}])$$
$$=\beta\int_0^t ds\lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0}dt_0\,\omega_\beta\,(\alpha_{t_0,\,s+t_0;\,X}(\mathbb{J}))\cdot\mathbb{X}(s)\qquad(16)$$

$$\overline{P}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}S(\omega_\beta\otimes\mu\circ\beta_{T_n}\,|\,\omega_\beta\otimes\mu)=\widehat{\phi}(\mathbb{J}\otimes\widehat{\mathbb{X}})\qquad(17)$$

ただし、

$$\widehat{\phi}\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}dt(\omega_\beta\otimes\mu)\circ\beta_t\qquad(18)$$

よって、平均エントロピー生成は、

$$\overline{P}=\beta\,\widehat{\phi}(\mathbb{J}\otimes\widehat{\mathbb{X}})\geqq 0\qquad(19)$$

と表わされる。この$\hat{\varphi}$は、decoupled dynamics$\hat{\alpha}_t$に関する平衡状態$\omega_\beta \otimes \mu$を始状態として出発した合成系が、系と外力Xとのcouplingを時間的に不変な形で含むdynamicsβ_tによって駆動された結果、'無限の未来' $t \to \infty$に終状態として行着くことになる（可能な一つの）定常状態である。従って、上式のエントロピー生成$\overline{P}$は、古典的なOnsagerの散逸関数［(flux)×(force)］を、合成系全体の終状態$\hat{\varphi}$での期待値という形で対応論的に一般化したものと見ることができる。

ところで、この合成系の記述形式には外力も'力学変数'として'観測対象'の中に入っているから、もしその'正確な値'が指定できるとすれば、前節の話と何等違いはなくわざわざ合成系を持出すまでもなかったように見える。ここは非常に微妙であるが、そうではなくて、実は元々の外力X(t)と(10)式によってhullM_X上に定義された$\hat{X}$とはキチンと区別して扱う必要があるのである。一見tautologicalなこの(10)式に隠された物理的内容を少し探ってみるならば、次のような解釈に導かれるだろう：

・まず、(11)式が表わすエルゴード性との関連によって、hullM_Xの点ξには《外力X(t)の（仮想的な）ミクロゆらぎのconfiguration》という意味付けが与えられ、
・X(t)の時間的変化が、すべてこのhull上を動き回るミクロゆらぎξの運動$\sigma: t \mapsto \xi_{-t}$に帰着される結果として、
・hull＝ゆらぎの上に立つ関数$\hat{X}$自身は、このゆらぎの全体を通して不変に保たれる外力系の一つの'形態'、或いは、安定構造を表わす。

この$\hat{X}$は、一般に巨視的変数として'制御可能' and/or '再現可能'なものでありうる（例えば、電気抵抗の話なら、外部電圧の値、等として）。しかし$\hat{X}$ではなくて、σ_tの個々の軌道に沿う$\hat{X}$の実現値としての$t \to X(t)$の方を、完全に指定できる物理量であるかのように見做すとすれば、元々近似として設定したはずの外力と系とのcouplingの式(1)を、その近似の精度と不整合なミクロ領域にまで、不当に外挿し過ぎることになる。合成系を持込む以前の記述は、マクロ系としての外力がミクロの対象系とゆらぎなしにcoupleすると見る点で不自然なものであり、外力を汎関数的変量と見てそのゆらぎを扱う合成系のdynamicsβ_tは、この欠点を（ある精度の限界内で）克服するものといえる。

他方、外力のゆらぎを取り入れるために、$\hat{X}$だけでなくhullM_X上のあらゆる（連続）関数もろともすべて物理量として認めてしまうのは、明らかに拡げ過ぎであり'非現実的'と言わねばならない。'制御可能な環境因子'或いはミクロ系にとっての境界条件としての外力は、一旦'初期'条件としてset upすれば'後(or途中)'の推移は、'観測なしに'ミクロ系と'外力系'から成る合成系の自然な時間発展に委ねるべき性質のものである。

さて、そうするとゆらぎのためには合成系、観測量のためにはミクロ系、というわけで、'あちら立てればこちら立たず'のdilemmaに陥ったかのように見えるが、問題をきちんと分けて整理すれば、技術的には何等困難なく整合的に理解できるものである：

a) dynamicsの問題＝ Xのdynamicalなゆらぎ ➔ β_t

b) stateの問題＝ Xの値指定とそれに伴うゆらぎ・不確定性

➔ μ(＝ M_X 上の X の確率分布)

c) observableの問題＝何が観測量か？

要は、この外力Xのゆらぎを、対象系とのそのcoupling (1)の近似性と整合するような

‘適切な’精度において採り入れつつ [a) & b)]、対象系の記述に戻る[c)]ということである。

III)対象系への復帰＝合成系の中のsubsystemとしての対象系

これは、対象系を合成系の中に埋め込まれたものとして捉えることによって実現される：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathfrak{A} \arrow[r, hook, "\mathrm{i}\,:\,\text{埋め込み}"] \arrow[d, "\gamma_t"'] & \mathfrak{A}\otimes C(M_x)=\mathfrak{B} \arrow[d, "\beta_t"] \\
\mathfrak{A} & \mathfrak{B} \arrow[l, "\hat{\mu}\,:\,\text{条件付期待値}"']
\end{tikzcd}
\qquad B \longmapsto \mathrm{i}(B)\equiv B\otimes 1 \tag{20}
$$

$$\hat{\mu}(\hat{B}) \equiv \int_{M_x} d\mu(\xi)\hat{B}(\xi) \longleftarrow\!\!\shortmid \hat{B} \tag{21}$$

$$\rightarrow(\omega_\beta\otimes\mu)(\hat{B}) = \int_{M_x} d\mu(\xi)\,\omega_\beta(\hat{B}(\xi)) = \omega_\beta(\hat{\mu}(\hat{B})) \tag{22}$$

結局、元々の系$\mathfrak{A}$を

$$\gamma_t \equiv \hat{\mu}\circ\beta_t\circ\mathrm{i} \tag{23}$$

$$\phi \equiv \hat{\phi}\circ\mathrm{i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} dt(\omega_\beta\otimes\mu)\circ\beta_t\circ\mathrm{i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} dt\,\omega_\beta\circ\gamma_t \tag{24}$$

で定義された‘coarse-grained’dynamics γ_tと状態ϕにおいて見る、ということになる*)。このdynamicsγ_tは、α_tやβ_tと異なり、最早物理量の積構造を保つ変換ではない [非準同型性] が、‘任意の’系との合成に際して物理量のreality・positivityを

$$\forall k\in N \quad \gamma_t\otimes \mathrm{Id}_{M_k(\mathbb{C})} \quad : \text{positive mapping on } \mathfrak{A}\otimes M_k(\mathbb{C}) = M_k(\mathfrak{A})$$

という形で保存する‘完全正写像(CP map)’[4]であり、pure stateをmixed stateに移すような散逸的時間発展を与える。もしCP mapが逆変換を持てば、必ず積を積へ、pure stateをpure stateへ移し、散逸的ではなくなってしまうので、このCP mapという性質は、散逸性・不可逆性のための“marginal”な条件を丁度与えているということに注意したい。**)その不可逆性（→‘時間の矢’）は専らprojection＝条件付期待値$\hat{\mu}$から来るが、定義(21)及び(11)式からわかるように、これは、‘無限の過去$t_0\to-\infty$’に押しやられた初期状態＝initial time averaging μに由来するものである。ただし、通常の不可逆性の理解が‘（ミクロ的）相空間の圧倒的体積’を占める（マクロ的）平衡状態に比しての初期条件の特殊性という形で、専ら《平衡への回帰》＝熱力学的分岐の

脚注*)要するに‘partial trace’を取る操作として良く知られていることの無限系への一般化に過ぎないが、既知の形式的操作の物理的内容をちゃんと押えることで、その本質的内容が新しい領域へ自然に拡張されるようになるということが重要である。

**)‘不可逆性’＝逆変換の不在＆散逸性 [＝非準同型性] であり、物理量のreality[→positivity]を尊重する[→CP map]限り、積構造を保つ可逆系か、それを破る散逸不可逆系か、の何れか一方のchoiceしか本質的にはありえないということなのである。

文脈で論じられる[例えば、第2節のSpohn-Lebowitzの話]のに対して、ここでの話の本質は非熱力学的分岐=《平衡からの離脱》にある。

さて、上の状態ϕがこの散逸的時間発展γ_t関して非平衡定常状態となれば、いよいよ第2節冒頭のPrigogineの図式の成否を吟味する段取りになるのだが、残念ながら未だそうは問屋が下ろさない。埋め込み写像iと条件付期待値$\hat{\mu}$の間には

$$\hat{\mu} \bullet i = Id_{\mathfrak{A}} \tag{25}$$

という関係はあるのだが、それをひっくり返した式

$$i \circ \hat{\mu} \overset{?}{=} Id_{\mathfrak{B}} \tag{26}$$

は、対象系$\mathfrak{A}$と合成系$\mathfrak{B}$が同型でない限り成立しえないから、γ_tについての関係式

$$\gamma_s \circ \gamma_t \overset{?}{=} \gamma_{s+t} \qquad \text{(Markov性)} \tag{27}$$

が成り立つことは(‘trivial’な場合を除いて)一般に期待できない。そうすると、$\mathfrak{B}$上のdynamicsβ_tに関する極限的終状態$\hat{\phi}$の定常性が(13)式から導かれたのとは異なり、$\mathfrak{A}$上の状態ϕがdynamicsγ_tに関するfinal long-time averageであるという式(24)だけからでは、その定常性は保証されないことになる。実は、上のa),b),c)3つの側面の考察からは抜落ちていた今一つの側面として、

d)時(空)間階層の移行[ここでは、time scaleの形で]の問題、

が未だあったのである!これを解明することによって初めてエントロピー生成・散逸性と定常性・非平衡性の間の本質的関係を掴み出す手掛りが得られるだろう。次節では、この問題をvan Hove limitの視点から考えてみたい。

4. van Hove limitにおけるMarkov性と定常性

前節のdynamicsγ_tは、状態ϕの定常性のために要求された(27)式の条件を満たさなかったが、γ_tの不可逆性を考慮すると、条件(27)の意味する内容は、確率過程論の文脈でのMarkov(的半群)性の問題にほかならない。これは、【力学系→《部分系への‘projection’》→‘coarse-grained’ dissipative dynamics with memory effects =非Markov的過程→《(space)time scale change through van Hove limit》→Markov的確率過程】という、1950-60年代以来よく知られたstory [5]の前半の移行ステップに丁度対応し、前節の議論は、このMarkov性とfinal limiting stateの定常性との間の本質的な関係を示唆することになる。上のrecipeに従えば、先程のd)の問題への解答は、van Hove limit[12]によって与えられると期待される。

I) 階層移行としてのvan Hove limit; 線型応答の線型性の意味

即ち、系と外力のcoupling $A\otimes\hat{X}$にcoupling parameter λを入れて、

$$H_1 = -A\otimes\hat{X} \rightarrow -\lambda A\otimes\hat{X} \tag{28}$$

と置き換え、

$$\lambda^2 t = \tau \ : \text{fixed}の条件下に\ t \to \infty \ \&\ \lambda \to 0 \tag{29}$$

の極限を考えるということである*)。(29)は、一見形式的便宜的操作のようにも見えるが、そう見たのでは背後の自然な物理的意味が失われる。今の段階では多少唐突に響き得るが、この式は本来繰込み群的な文脈で見るべきだろう。つまり、

$$t = ミクロ時間、\tau = マクロ時間$$

と見て、(28)、(29)をchange of time-scale unitによるミクロ時間tからマクロ時間τへの時（空）間移行[d)]及びそれに伴う'effective coupling' $\lambda = \lambda(t)$の変化、dynamics の変形・移行、と解釈しようということである。$t \to \infty$の意味は、（'無限の'過去から'無限の'未来への）ミクロ的長時間にわたってミクロ素過程が'無限'に反復・蓄積される結果、時間τで記述されるマクロレベル上での状態変化が'目に見える'ようになるところまで、（ミクロの）時間発展を外挿することとして理解される。応答理論と散乱理論のレベルの違いを別にすれば、これは既に第２節のIII)項でも触れた散乱理論でお馴染みの状況でもある。

このように(29)式をスケール変換と解釈すると、それに伴って初期状態ω_βの温度$T = 1/k_B\beta$も

$$[ミクロ]: \beta \ \to \ \lambda^2\beta \equiv \beta_{eff}: [マクロ] \tag{30}$$

という形でスケールされる[∵) KMS条件→See [13]]ので、(19)の平均エントロピー生成$\overline{P}$は、(28)、(30)を考慮して

$$\overline{P} = \beta\,\hat{\phi}_\lambda(\lambda \mathbb{J} \otimes \hat{\mathbb{X}}) = \beta_{eff}\lambda^{-1}\hat{\phi}_\lambda(\mathbb{J} \otimes \hat{\mathbb{X}}) \tag{31}$$

となる。ここで、state $\hat{\phi}$のλ依存性を明示するために$\hat{\phi}_\lambda$と書いた。$\lambda = 0$の時、上の式の分子は＝0となるから、この(31)式で極限(29)をとると($\overline{P}$の正値性は保ったままで)

$$\overline{P} = \beta_{eff}\lim_{\lambda \to 0}\hat{\phi}_\lambda(\mathbb{J} \otimes \hat{\mathbb{X}})/\lambda = \beta_{eff}\frac{d}{d\lambda}\hat{\phi}_\lambda(\mathbb{J} \otimes \hat{\mathbb{X}})\Big|_{\lambda=0} \tag{32}$$

を得る**)。$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}$ とは、線型応答＝coupling λの最初のnon-trivial term、を取り出すということにほかならないから、(32)は、極限(29)が物理的に意味のある状況を記述するという前提［即ち、赤外安定固定点が原点に有るということ］の下で、線型応答理論の近似法の正当性を保証する。

II) generalized master equationとMarkov過程への移行

そこで次には、この前提を検討して極限(29)のもっと自然な意味を知るために、それとMarkov的定常性との係わりについてもう少し掘り下げて見よう。

まず、エネルギー的に見れば$t \to \infty$とは、$E \sim 0$、即ちinfrared(IR) regionということ

脚注*)不可逆過程への極限移行としては、weak coupling limitとsingular coupling limitの２通りの極限が議論されて来たが、van Hove limitは前者の場合である[12]。
**)次頁脚注へ。

であり、‘遅い’運動へのfocusingによって状態変化の過程を取り出すことである。この時、‘速い’運動の方は、その‘不変’モード［$t\to\infty$における‘saddle point’としての準粒子描像、etc.］が、状態変化記述の基準［即ち、何から何への変化か？ということ］として機能することになるので、‘速い’運動それ自体は‘直接的には見ない’様な記述になっていなければならない[adiabatic ‘elimination’]。これは、本質的には、合成系のdynamics β_tを、(15)式の‘Hamiltonian’ Hにおいて$H_\beta\otimes 1+\mathbb{1}\otimes\Delta$を非摂動項、$\lambda\to 0$で消える$\lambda\mathbb{A}\otimes\mathbb{X}$を摂動項とする相互作用表示で扱うことである。(29)の極限を調べるには、この状況でこれを元々の対象系　に‘射影’し、それに伴う‘繰込み効果’も取込んで“generalized master equation”[14]を考えるのが都合が良い。条件付期待値$\hat{\mu}$による‘射影’分解

$$P_0\equiv i\circ\hat{\mu}=P_0{}^2、P_1\equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}-P_0=P_1{}^2、P_0+P_1=\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$

を用いて、通常のdensity matrix形式の扱いをalgebra上のdynamicsに一般化すると：

$$\gamma_{\tau/\lambda^2}\cdot\alpha^{-1}_{\tau/\lambda^2}=\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}-\int_0^\tau du\int_0^{\frac{\tau-u}{\lambda^2}}ds\ \gamma_{u/\lambda^2}\circ\hat{\mu}\circ\mathrm{ad}(\mathbb{A}\otimes\hat{\mathbb{X}})\circ P_1\circ e^{sZ}$$
$$\circ\,\mathrm{ad}(\mathbb{A}\otimes\hat{\mathbb{X}})\circ i\circ\alpha^{-1}_{u/\lambda^2+s}\qquad(33)$$

ただし、外力$\hat{\mathbb{X}}$の定数項を落として［i.e. $\mu(\hat{\mathbb{X}})=0$］、

$$Z=\mathrm{ad}(iH_0)-\lambda P_1\mathrm{ad}(i\mathbb{A}\otimes\hat{\mathbb{X}})P_1\qquad(34)$$

と置いた。ここで極限(29)を考え[scale change of time]、右辺第２項の２番目の積分上端を∞で近似することが出来れば、memory effectが消え時間軸に関する‘局所性’

前頁脚注**)正確を期するなら、(31)、(32)式には一つの‘トリック’がある：(17)式でstate$\hat{\varphi}$を定義する時に用いたfinal long time average $T_n\to\infty\,(n\to\infty)$は、それ自身極限$t\to\infty$の一つの形であり、(29)を額面通りに受取ればここでのλは0へtendすべきはずの量であるのに、(31)、(32)ではそれを‘有限量’であるかの様に扱っている。これは確かに奇妙に見えるが、実は次の２通りの見方で正当化可能である。一つは、出発点の$\omega_\beta\otimes\mu$から$\hat{\varphi}$への移行は既に(17)式で完了しており、そのfinal stageに現れた新しい一つの力学系において、改めて(29)に基づくスケール変換＝視点の移動を行なう、という形で、各段階での極限移行を分離し一つ一つをrealisticな移行の物理的過程と見做す考え方である。もう一つは、(29)の拘束条件通りに$T_n\to\infty\,(n\to\infty)$と$\lambda\to 0$を連動させるけれども、$T_n$、$\lambda$を各々、超準解析[15]の文脈での<u>無限小、無限大の超実数</u>と見做して、極限操作なしに(32)をそのまま（標準部分をとる操作によって）微係数の定義として意味づけるやり方である。この後者の見方の物理的基礎は結局前者の見方と殆ど同じ内容に帰するのだが、その利点は、ミクロ領域・マクロ領域のそれぞれが‘閉じた’領域を各々で形成しながら、なおかつ(29)のような‘単位の極限的取替え’を通じて相互に移行してしまうという形で、階層移行の本質を巧妙に取り入れており、そのために‘物理的無限小’に関するナイーブな形式的取扱いを素直な形でかつsystematicに正当化できるところにある[16]。外力$\mathbb{X}$とそのhull M_Xの扱いもこの見地で一貫した方が、本当はもっとスッキリするかもしれない。

＝Markov性が回復して、Markovian dynamical semigroup $\tilde{\gamma}_\tau \equiv \gamma_{\tau/\lambda^2}$ $(\lambda \sim 0, \tau \geqq 0)$ で記述される定常的不可逆過程［scale change of dynamics］と、それに関するstateϕの定常性が実現する[scale change of state]。ただし、(33)式における$\alpha^{-1}_{\tau/\lambda^2}$の因子の存在を考慮すると、$\lambda \sim 0$の極限でのこの方程式、従ってMarkov過程$\gamma_\tau$、が意味を持ち得るのは、本質的には、$\alpha_t$の下で（準）不変な物理量に対してのみであることがわかる。正確なmacro-observablesの特徴付けのためには、(33)式の長時間極限に関してもう少し立入った評価が必要だが、何れにせよ、これによってobservable algebraの階層移行[scale change of algebra]が起こることは定性的には明らかであろう。

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathfrak{A}} \arrow[r, "\tilde{\gamma}_\tau"] & \tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_{\text{quasi-inv.}} \\
\mathfrak{A} \arrow[u] \arrow[r, shift left, "\gamma_t"] \arrow[r, shift right, "\alpha_{t_1,t_2;\chi}"'] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathfrak{A} \arrow[u] \\
\mathfrak{B} \arrow[r, "\beta_t"] & \mathfrak{B} \arrow[u, "\hat{\mu}"']
\end{tikzcd}
\tag{35}
$$

III)終状態系への分岐過程

上記の極限移行に係わるtechnicalな問題の議論は省略して、ここでは次の３点だけをコメントしておこう。

a)極限状態ϕとその非一意性ーscale change of stateとbifurcation problem

出発点の初期状態ω_βは温度平衡状態として‘微小’摂動に対する安定性を持ち、十分長時間の後に摂動の影響は消失して＜平衡への回帰＞が起こる［エルゴード性］[16]。我々が応答の非線型性を保持し合成系上で状態$\phi_t = \omega_\beta \otimes \mu \circ \beta_t$の振舞を追跡してきたのは、このエルゴード性を‘振切って’熱力学的分岐からの脱出を図り、非平衡定常状態に辿りつくためであった[scale change of dynamicsによるuphill process]。ただし、今度はこの（合成系の）非エルゴード性の故に、目指す非平衡定常状態と目される終状態極限は一意性が保証されないので、t→∞の極限の取り方に応じて幾つもの異なった定常的終状態が出現し得ることになった。これは、確かに問題の具体的取り扱いに

際して技術的困難をもたらすものではあるが、他面、光双安定性その他でよく知られたbifurcationの現象を考慮するなら、必ずしも否定的にのみ受取るのではなく、むしろ積極的に、非熱力学的分岐の持つ質的多様性の理論的表現として位置付けるべきものだろう。そうすると重要になってくるのは、如何なる極限状態が“幾つ”あるか？という分類問題・変分問題である。これは、genericな非エルゴード的終状態をエルゴード分解*)し、その分解測度から行着き先の確率分布＝実現確率を読取る［実現過程］という形に整理され、そこでは、‘準不変量’の概念が、状態分解のパラメータとして役立つだろう［情報圧縮に伴うscale change of state］。ここまでくれば、観測理論における観測値の確率分布・‘波束の収縮’の問題との類似性・並行性はもはや明白であろうが、それは単に表面的・比喩的なものではなく、実はもっと立入ったレベルでの構造の対応関係にまで及ぶものであり、この辺の事情を統一的に見通し良く記述するためには、“instrument”の概念が重要と思われる。

b)scale change of dynamics,state,& observable algebras

このinstrumentの概念を一般化して、上のvan Hove limitの極限移行を通じて到達する終状態系の構造を議論すると、極限的Markov不可逆過程とそれに関する定常状態、マクロ的物理量の３者が相互に他を規定し合いながら分岐の過程を辿っていく様子が（少なくとも原理的には）記述できるようになる。これは、時（空）間のscale changeに伴って、dynamics、state、observableの３項すべてが、動的かつ相互規定的に変動して行くという“Becoming”のprocessの一端を垣間見せるものといえよう。敷衍するなら、物理系とそれを記述する理論［“Beings”］を丸ごと時間・時空スケール・時空構造と共に移り変わらせる内在的メカニズム［階層移行の論理と“Becoming”の過程］を解明すれば、それを通じて異なる諸理論が相互に結びつけられた一つのnetworkが形成され、それによって、より高次なレベルでの動的かつ統一的な世界が構成される、という理論的方向性がここから抽き出せるだろう。

c)scale change of spacetime

上の様な見方に立って、“Being”の構造に含まれるvirtualな階層間移行の関係から、“Becoming”＝構造移行過程をそのrealization processとして系統的に抽き出し展開しようとすると、時空階層移行にまつわるアプリオリズムということがスケール変換(29)でも問題になって来る。即ち、dynamics,observable,stateの３項すべては、お互いに他を規定し合いながら動くにもかかわらず、それらを動かすパラメータとしての時間スケールの変換だけは、‘外から勝手に手で’与えられ、この変換性・スケールのchoice自体は、一体何から来るのかが不問に付されている。これは、宇宙進化における散逸性と構造の生成に関する議論において、＜一体何がスケールを決めるのか？＞という形で常に我々の頭を悩ます問題でもある。

今この問題に詳しくは立入らないが、例えば、van Hove limit(29)の場合、この極限操作に物理的意味を付与するためには、繰込み群的に見て、$\lambda=0$が合成系($\mathcal{B},\beta_r$)の赤外安定なfixed pointになっていなければならないことは明らかであろう。もう一つ、

---

*)ただし、この‘エルゴード性’は合成系のレベルでのものであり、その中に‘埋め込まれた’対象系はopen subsystemとなっているので、‘孤立系’の文脈で‘熱力学的分岐’と深く結びついた‘通常の’エルゴード性[17]とは、状況が異なる点に注意したい。

このアプリオリズムの欠陥は、<1-parameter or 1-dimensional time>に固執して、特定のミクロ・マクロ２層の関係だけを取り出して論ずる極限移行の定式の限界にも由来する。‘時間’をone-parameterの実変数tに限定するかぎり、ミクロ時間もマクロ時間もそれ自身では、せいぜい‘時間の矢’と単位の取り方＝スケールという‘trivialな’指標を除けば、全く同じ‘形’をしており区別が付けられない。*)残された‘唯一の’重要な時空の構造分類指標としてのスケールも、扱うべき対象の階層が固定されているためにそのスケール変換の物理的根拠が見失われ、問題の本質が、単にその系を記述対象として選んだ‘記述者の視点’の問題へと擬人化・主観化されることになってしまう。しかし、van Hove limitを根拠づけるcoupling λの繰込み群的性質が物理系$(\mathcal{B}, \beta_t)$それ自体から決まるように、時空構造をも《物質運動との相互規定的な関係の中でそれ自身dynamicalに決まるもの》と捉らえるEinsteinの思想をここで思い出すなら、この画期的な自然認識を一般相対論的・宇宙論的領域の‘天上界’・‘神棚’に祭り上げてしまうのは、余りに‘勿体なさ過ぎ’はしないだろうか？勿論、Galilei相対性が十分良い近似で成立する現象領域にまで、馬鹿の一つ覚えのように一律にRiemann幾何学を持出す必要はない。重要なのは、それぞれの階層領域で最も適合的な時空構造を与えるような記述形式において、時空を物質運動との相関の中で動かすことだろう。次節では、非平衡性との関連で、非平衡的構造を維持する熱浴の不均質性と時空構造との係わりを考えてみたい。

5. 非平衡性と不可逆性ー高次構造形成と熱力学第２法則／構造移行過程へ

I) 平衡 vs. 非平衡

ここまでの議論は、ひたすら《（流れの中での）定常性》の定式化を目指して延々と論じてきたのであり、我々は、未だ非平衡性をどう特徴付けるかということは議論していなかった。やっとそれがここで問題になる。

a)熱力学第０法則・‘熱浴’概念と非平衡性

相対エントロピーが２つの状態のズレを測る量であり、（‘無限の過去’における平衡状態を基準状態として測った）この量を長時間にわたって平均し単位時間当りに換算したものが我々の平均エントロピー生成 $\overline{P}$ であったから、系が初めの平衡状態からズレている時間が‘十分’長い時にのみ $\overline{P}$ は零でない正の値をとる［平衡からの離脱］。従って、$\overline{P}>0$は、少なくとも非平衡定常性の成立にとって１つの必要条件である。**)では、その十分条件とは何であろうか？

まず、その消極的表現における「非平衡性」とは、今更改めていうまでもなく＜温度平衡概念の否定＞ということである。しかしそうだとすると、非平衡性を判別するはず

脚注*)数学基礎論におけるモデル理論を考慮するなら、実はこれは正しくない。その中に区別さるべき異なる実数体が無数にあって、その自由度のお陰で無限小・無限大超実数が合理的に記述されるのである。

**)ただし、$S(\phi_t | \omega_\beta) \sim \log t + \mathrm{const.}$という場合は微妙なcritical caseであり、$\overline{P}=0$ではあっても、終状態極限ϕを熱平衡と断定すべきか否か、今のところ判断を保留せざるを得ない。

のエントロピー生成の式(32)が、（非平衡）終状態ϕへの極限移行の後でもなおβ_{eff}という形で（逆）温度を残しているのは、いかにも奇妙なことに見えるかもしれない。この平均エントロピー生成の定義が誤りでないとすれば、これが一体どこのどういう温度なのかを明らかにしておく必要があろう。そこで、この問題を、非平衡性のもっと積極的な内容を掴み出す上での手掛りとして考えるために、温度とは何であったかを極く簡単に振返っておくのが都合が良い。これは、別段pedanticな‘哲学的’議論を始めようということではなくて、

熱力学第０法則＝《２つの系の接触関係》の平衡性が同値関係の性質を満たすこと
⇒ この同値類のパラメータ＝温度*)

ということ[18]を確認すればよい。温度平衡状態がこのような推移律を満たす２つの系の安定的接触関係を本質に持つ**)とするならば、非平衡性とはその同値性の破れに他ならない。このことは、非平衡状態の本質を２つの系の関係だけに帰着することはできず、その把握には最低３つの系の扱いが必要であることを意味する。３つの系の‘２項関係’は本来なら３つあるはずだが、簡単のためそのうちの２つの間の相互作用を無視する近似をとってよいとすれば、この３つの系は、対象系とそれに接する２つの‘熱浴’としてモデル化できる。この場合、２つの熱浴に対する対象系の２つの接触関係は、２つの＜熱浴の温度＞T_1, T_2で代表される。温度なしの固定された外力では、Bratteli-Kishimoto-Robinsonの定理[17]によって十分時間が経つと平衡状態に戻ってしまうし、また、外力に熱的ゆらぎを入れてもそれが一つの温度で記述されるものなら、$\overline{P}=0$、すなわち平衡への回帰が実現してしまうので、異なる２つの＜熱浴の温度＞の導入は、非平衡性‘実現’のための必須条件ということになる。

b)‘熱浴’としての‘外力’

では、《異なる熱浴の温度》ということをどうやって外力Xに反映させればよいのだろうか？前節では、外力$X=(X_t)$を時間に関する概周期関数にとり、そのhull M_X上のHaar測度μによって無限の過去に押しやられた初期時刻［(14)式］を表わしたのであるが、μの性質としてここまでの議論に重要な役割を果していたのは、実のところそれが

---

*)この事情の故に、物理的な意味（i.e.熱力学第０法則）での温度平衡状態とは、単なるKMS状態ではなく、ergodicなKMS状態［＝extremal KMS state→factorial state］でなければならない。さもなければ、接触する相手の系に応じて異なる接触関係＝状態が（エルゴード分解＝スペクトル分解を通じて）出現することになる。

**)‘thermo field dynamics’での‘non-tilde’と‘tilde’の関係は、対象系と熱浴との平衡的接触関係の抽象的表現であり（例えば、[19]参照）、両者の鏡像的関係は、平衡性のもつこの同値関係性・universalityに由来する熱浴の没個性的性格を表わしている。つまり、平衡系としての近似的記述が意味をもち得る状況（余りにミクロ過ぎず余りにマクロ過ぎない）とは、‘熱浴’が現実には対象系と相互作用する一個の物理系として存在していても、その内部構造とそれに基づく‘個性’が当該現象の記述には本質的役割を演じることなく、両者を合せた系の現実的振舞が、殆ど対象系の構造と性質だけで決まってしまうような物理的状況に他ならない。非平衡とは、この‘熱浴’の内部構造・‘個性’が（部分的にもせよ）重要になり始め、こういう近似では、記述が不完全になってしまうような物理的状況に対応している。

対象系と接する外力系の状態であるということだけであり、(20)、(22)等の関係さえ成立てばあとの具体形は（実は量子・古典の区別さえも含めて）どうでもよかったのである。物理的直観のために解釈を付け加えるなら、hull $M_\times$上のflowσ_tに対するHaar測度μの不変性とそのエルゴード性は、状態μを古典系の‘microcanonical ensemble’と見做せることを示唆する。言換えれば、$A=(A_i)$を通じて対象系に接していることを除けば、外力系は‘孤立系’＝１個の全体系として、その内部構造を問うことなく捉えられていたことになるのだが、今ここで複数の＜熱浴の温度＞$T_1, T_2, \cdots$を問題にするということは、複数個の外力系を導入すること［拡張による非エルゴード性の導入］、或いは逆に、１個の外力系をその内部構造が‘効いてくる’ような時間的・空間的スケールで扱うこと［‘視点’のミクロ化による非エルゴード性］、に他ならない。つまり、外力系の対象系との接点は１つだけなのではなく、‘複数の点’での接触があってその接点毎に接触の仕方＝温度、が異なるということである。宇宙進化の議論をも取込むには、前者の‘拡張’的見方の方が一般性があるのだが、それ以下のスケールの議論では、‘拡張’も‘ミクロ化’もdilationの方法［第３節の合成系の議論と本質的に同じもの］を通じて同等になるので、ここでは、簡単のため後者の立場で考えよう。そうするとこれは、‘microcanonical ensemble状態’μにある‘全体系’$C(M_\times)$の中から各‘接点’を部分系として取出して近似的にその状態規定を行なうことであり、標準的な統計力学の方法に従えば、各‘接点’iは‘canonical ensembles’＝温度平衡状態T_iとして捉えられることになる。ここで、第２節末尾の概周期関数の定義を思い出して、その１つ１つの振動数毎に調和振動子とその熱的平衡を想定するならば、詳細釣合の原理によってその各々の温度は、

$$\hbar\omega_i = k_B T_i / 2 = 1/2\beta_i \tag{36}$$

で与えられる。‘有効温度’T_{eff}とは、３系全てを１つの合成系にまとめ、それを十分‘遠方’から長いtime scaleでその内部構造を見ることなく記述する時、それを取巻く環境との安定的接触関係として（例えば3° K background radiationのように）現れて来ると考えてよいだろう。そこで、エントロピー生成の式(32)は、

$$k_B\overline{P} = k_B\beta_{eff}\sum_{n=0}^{\infty}(\hbar\omega_n)^{-1}\tanh(\beta_{eff}\omega_n\hbar/2)\sum_{i,j}X_i(\omega_n)^* L_{ij}(\omega_n)X_j(\omega_n)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{T_n}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_n \tag{37}$$

ただし、

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_n \equiv -2\beta_{eff}\tanh(\beta_{eff}\omega_n\hbar/2)\sum_{i,j}X_i(\omega_n)^* L_{ij}(\omega_n)X_j(\omega_n) \tag{38}$$

$$L_{ij}(\omega_n) \equiv \int d\tau\, e^{i\omega_n\tau}\,\omega_\beta\,(\{\alpha_\tau(J_i), J_j\}) \tag{39}$$

と書換えられる。これで、エントロピー生成の意味、Clausiusの古典的なエントロピーの議論との関連は明らかであろう。２つの異なる＜熱浴の温度＞T_1、T_2を高温熱源・低

温熱源のそれと見做せば、熱力学で先刻お馴染みの熱機関の循環過程となり、(37)はこの過程での単位時間あたりのエントロピー生成量と解釈できる。この最も単純な古典的モデルとの対比から、次のことが分る。まず、熱力学での状態概念は、定義によって平衡状態にほかならず、非平衡性は平衡状態間の移行過程[=“Becoming”としての“gap”]（及び局所平衡的非平衡）としてのみ理解された。それに対して、ここでの非平衡定常状態とは、熱機関の定常的循環過程の全体をひとまとめに“状態”と捉らえ、状態概念を‘入れ子’式にマクロ方向へ拡張することによって、より高いレベルでの移行過程の記述をも可能にする。同時に、熱力学がその状態概念のミクロ的基礎に無関心なのに対して、ここではミクロからマクロへの移行・接合こそが重要であり、非平衡的運動の起動因も、熱機関の場合のように外からの操作にではなく、より対象系に即してその内部のミクロ的ゆらぎの運動及びそれと‘環境’[これも必ずしも空間的な意味での‘外部’とは限らない！]との相互作用に求めているという大きな違いがあり、単なる熱力学への回顧に終るものでないことは強調したい。

もう一つ、熱機関ということなら‘熱効率’ηの概念に話が行くのが自然な成行きだが、一般的文脈においても‘有効温度’T_{eff}と組になって、初めの(T_1, T_2)と同等な2-parameterをなす物理量は何かは、当然問題となる。熱機関におけるCarnot cycleの場合なら、準静的過程の条件下にそれは２つの熱浴の温度の比に帰着されるから、(36)を使うと、

$$\eta = 1 - T_2 / T_1 = 1 - \omega_2 / \omega_1 \tag{41}$$

となる。これは本質的には、２つの‘熱浴’での運動スケールの比という形で、‘ミクロ的・低次’のエネルギー形態＝熱と‘マクロ的・高次’のそれ＝仕事、の間の階層的区別と相互移行の関係、運動の‘質’的・構造的・情報的側面を‘環境’サイドから定量的に見たものである。非平衡性の概念は、この［効率ηの0からのズレ］＝［‘質的高次性’の現われ］によって、単なる平衡概念の否定という消極的な形態を脱し、‘仕事＝秩序形成の遂行’＝高次活動性という形で初めてその積極的内容が与えられることになるだろう。

c)‘熱浴’の構造と時空

上の議論は、非平衡性の理解における多熱浴系の扱いの重要性[20]を改めて教えるものであり、＜質点のNewton力学→質点系の力学→無限質点系→連続体力学＞という移行過程のアナロジーをここに取込めば、時空依存の非平衡的温度分布をもった局所平衡系の量子場理論の一般的展開も可能となる［‘熱浴’・‘環境’の時空的構造］。温度勾配-熱伝導現象のような熱的応力の問題やレーザーにおける量子電磁場やまた逆転分布等の問題を、この文脈で再考することには大きな興味がある。ただし、(36)式から明らかなように、この多熱浴‘環境’の複数の温度は必ずしもその空間的配置に結びつくとは限らないから、例えば、‘粒子’の種類の質的差異によっても供給され得る［熱浴の‘内部空間的’質的構造］。逆にいえば、ミクロの基本構成子がもつ内部自由度の質的多様性(flavor・color・generation、等々)は、このレベルにまで来て初めて現実的な世界の中に、マクロの質的多様性＝非平衡定常性＝自己組織性＝高次構造の能動性、という形で展開され、その本質を現わすのだと言えるだろう。こうして、ミクロ世界では

virtualなものに過ぎなかった空間的自由度と共に、内部自由度に由来する粒子の質的差異が、'熱浴'・'環境'の構造及びそれと対象系との接触を通じて現実化され、その隠れた'意味'が明らかになると同時に、そのことがとりもなおさず、マクロ世界の質的多様性の起源をミクロの基礎から解明することにもなる。

II）平衡への回帰 vs. 平衡からの離脱ー非平衡性と'時間の矢'

既に注意したように、従来のvan Hove limitの議論は、専ら平衡への回帰：$\phi_t \to \omega$ の文脈での力学系から散逸過程への移行に関するものであったが、ここでは、平衡から非平衡定常性への移行として、回帰しない状況＝《平衡からの離脱》を問題にしてきた。これは、平衡への回帰＝[非平衡→平衡]、平衡からの離脱＝[平衡→非平衡]、と対比してみれば、一見全く逆向きの時間方向を論じているかのような形になっている。前者は、通常の熱力学第2法則でよく知られた不可逆性であり、第2節で触れたSpohn-Lebowitzの話もそれの量子系への一つの拡張であった。

ではこの後者の場合、第2法則との関係は、一体どうなっているのだろうか？もし、この両者を同一平面に並べて考えてしまうなら、一方は第2法則で許された向き、他方は'禁止'された向きということになって、この現実的自然のダイナミックな運動の最も重要な部分が全て理論からはみ出してしまう。これは、Boltzmann以来物理屋を悩ませて来た有名な'宇宙の熱的死'の'パラドックス'であり、我々に熱力学第2法則の見直しを迫るものである。既に一般相対論の立場からは、重力場の存在がもたらす宇宙の開放系的性格[21]及びその万有引力性と最大エントロピーとの関係[22]に、この散逸過程と構造形成との同時進行の調停役を求める一つの考えが提出されており、その深い含意には傾聴すべきものがあるだろう。

我々が上で見てきたことは、非回帰のためには散逸性＝［$\overline{P}>0$］が不可欠であり、$\overline{P}=0$なら平衡＝無秩序に戻ってしまうため、マクロの高次構造＝非平衡定常状態はミクロの散逸性なしには成立しえないものであるということであった。このミクロ的な散逸性の増大という意味では、非回帰の過程も第2法則に抵触するような'インチキ'を決してやっているわけではない。ただ、第2法則から《平衡への回帰》を一義的に結論づけるためには、安定的接触関係としての平衡性の同値律が満たされること、或いは、平衡状態に基づく近似のuniversalityの保証、が前提条件として必要なはずだが、既に見たように非平衡性の領域＝非熱力学的分岐においては、これは成立たない。*)つまり、平衡状態を基準にした記述は万能ではなく、その近似に固有の適用領域＝熱力学的分岐が存在するのであって、その外にまでこの近似を外挿したことが、そもそもの'パラド

脚注*)非熱力学的分岐［＝KMS状態からの'微小摂動'では到達できない状態］の存在自体は、その'補集合'を規定するKMS条件の与え方からわかるように、'環境'とは独立に、対象系の力学法則［及び'微小摂動'の加え方＝状態空間の位相の入れ方］そのものから内在的に決まるものであり、ここで考えて来たような平衡系の変形に基づくその構成的理解、物理的状況の解釈、に際しての'熱浴'導入の問題とは一応区別して考えなければならない。［'一応'というのは、状態空間の位相の問題自体が、実は記述の精度＝ミクロ・マクロ階層間の相互関係に依存するので、'完全に'とは言えないことを意味している。］

ックス’の原因だったのである。そして、この広い意味での第2法則＝散逸性そのものが、マクロレベルにおいては、非平衡な秩序性・構造安定性・能動性［＝‘仕事’＝高次秩序形成をなしうること］の基盤をなすというところに問題の核心がある。即ち、重要なのは前節で見たミクロ階層とマクロ階層の区別とその相互間の連関・移行であり、この階層移行関係こそが散逸性と秩序構造形成との真の‘調停者’であって、この文脈に関する限りは重力場の問題は一つの特殊形態に過ぎない。繰返すなら、時空構造を《物質運動との相互規定的な関係の中でそれ自身dynamicalに動くもの》と捉えるEinsteinの思想そのものが重要なのであって、それをRiemann幾何で書くかどうかは技術的詳細に属する問題としてこの際‘どうでもよい’。この視点から、先程のSpohn-Lebowitzのエントロピー生成[非平衡→平衡]と我々のそれ[平衡→非平衡]とを比較しておくことは興味深いと思われる。

	Spohn-Lebowitz	Ojima-Hasegawa-Ichiyanagi
初期条件[initial] 外力[input]	非平衡［熱力学的分岐］ なし	平衡 あり
運動法則の定常性 散逸性	定常過程 散逸過程	非定常過程 力学系
終状態 熱の‘収支バランス’	平衡 ‘放熱的’・downhill	非平衡［非熱力学的分岐］ ‘吸熱的’・uphill
相対エントロピーと符号	−S(始状態｜終状態)	＋S(終状態｜始状態)
相対エントロピーから エントロピー生成へ	時間微分	単位長時間当り

＜相対エントロピーと符号＞については、何れの場合もS(｜)の｜の左側にある状態が｜の右側の‘基準状態’からどれだけズレているかを測ることになっていて、符号は｜の右から左へ向かってを時間の正の向きにとっている。これが丁度、放熱・吸熱の関係と対応している。しかし、最も大きな違いは、微分する[Spohn-Lebowitz]のとfinal-long timeで割る［our case]のとの違いであり、前者の方がよりミクロの視点だというところにある。このミクロ・マクロのレベルの違いこそが、《平衡からの離脱の過程での熱力学第2法則》を、通常の第2法則との明確な対比と共通性に基づいて正しく理解するための鍵であって、それを考慮すれば、実は前者と後者は同一平面内で対立するものではなくて、‘入れ子’構造の関係において統一すべきものであることがわかる。即ち、《平衡からの離脱》の全過程の中には、3つ（実は4つ）の階層が絡んでいる：マクロの上層には非熱力学的分岐に属する散逸的非平衡秩序構造($\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\gamma}_t, \tilde{\varphi}$)、その下には《平衡への回帰》の‘ゆらぎ’を反復するサブマクロの力学−熱力学的過程（局所平衡）[($\mathfrak{A}, \alpha_{t1, t2; x}, \omega_\beta$) & ‘熱浴’の熱力学的構造]があり、全体的な<u>構造形成の不可</u>

逆的移行の起源自体は既に見たように最下層の（力学的）ミクロレベル［$(\mathcal{B}, \beta_t, \omega_\beta \otimes \mu)$；$\omega_\beta \otimes \mu \circ \beta_t \neq \omega_\beta \otimes \mu$］のところに求めるべきものなのである。大事なことは、この３層が今まで論じてきた内容によって相互に結びつけられているということの認識であり、例えば、Spohn-Lebowitzの平衡への回帰＝[非平衡→平衡]におけるミクロのfinal time＝+∞は、我々の議論での平衡からの離脱＝[平衡→非平衡]にとっては、サブマクロのinitial time＝-∞の中に包含され、サブマクロのfinal time t＝+∞とはvan Hove limitのスケール変換(29)によって、マクロ的有限時間τのことに他ならなかった。最後の第４層とは、この力学的ミクロ階層からマクロ的非平衡階層への移行の諸段階を繋ぎ合せ、１つの全体的過程として記述する‘メタ時空’の階層である。これは、ここの話では未だ、単なる‘記述のための理論上の形式的・便宜的パラメータ’に過ぎないように見えるかもしれないが、宇宙進化の文脈まで行けば現実的な物理的存在として現われ、その一つの具体形が一般相対論の重力場だということになるわけである。

こうして、宇宙の全体的な進化過程の大きな流れの中で見れば、上記の‘対立’も単に大状況と小状況の関係の問題に帰して、決して逆向きの時間の対立が問題なのではないだろう。大状況とは、マクロ的な不可逆非平衡の構造形成的展開過程であり、小状況とはミクロゆらぎ及び形成された構造が破壊される（サブマクロでの）平衡或いは定常的下位構造への回帰のことであるが、これは丁度生物進化における‘系統発生’と‘個体発生’の関係に対比できるものかもしれない。

以上の議論を踏まえて、熱力学第０法則、第１法則、第２法則を簡単に整理し直してみよう。

・第０法則［基準系の同定］：熱力学的分岐内での状態概念＝温度平衡状態の確定
　　　［＝同値律を満たす安定的接触関係］
・第１法則［階層移行の論理］：ミクロ・マクロ、対象系・熱浴、部分系・全体系への
　　　階層分離［マクロ＝‘仕事’／ミクロ＝熱］とその統合(=dilation)＝合成系
　　　及び合成系の定常性＝エネルギー保存則
・第２法則［状態変化過程の論理］：ミクロゆらぎ・散逸性とマクロ構造の連関・移行
　　i)熱力学的分岐内で:平衡への回帰ーエントロピーの論理
　　ii)非熱力学的分岐への移行：平衡からの離脱ーエントロピー生成の論理

つまり、＜熱力学第２法則＞には、異なったレベルにおける２つのversionがあって、‘通常’のそれは、平衡への回帰の文脈で理解されてきたもの、もうひとつは、平衡からの離脱＝構造形成の高次レベルでのものということになる。Prigogineの散逸構造やHakenのSynergetics、etc.は、これを、現象論的に捉えたものとして概念的に重要な意義を持つと言えるだろう。［ただし、無限系の量子論への理解の仕方や、初期条件の‘特殊性’・‘情報ロス’と時間の矢の関係その他を巡る理論的な側面に関しては、詳細に検討し出すと気になる点が幾つも出て来るので注意を要するが…。］

我々物理屋はこれまで＜ミクロの可逆力学的法則性＞とその＜粗視化・‘情報圧縮’としてのマクロ的不可逆性＞という言い方に慣れ親しんできたが、果たして一方的に、前者が‘窮極的’理論で後者は‘単なる’現象論的近似、と言い切ってよいものだろうか？前者とて《short time & small space region》に基づく近似、即ち、扱う時空領域を極小＝ミクロに限定したことに起因する近似的可逆反復性に‘過ぎない’ものを、そのまま全時空へ‘無理矢理’外挿したものではあるまいか？粗視化や‘環境’という

ものを、'窮極理論'への'夾雑物'ではなく、ミクロ化に際して捨象したマクロ要因の一部を、近似的に復元するものとして捉らえた方が自然だと思われる。
そうすると次に問題となってくるのは、非平衡性＝'散逸構造'の存在基盤を、外力系＝環境＝外部要因の非平衡性に専ら帰着させる見解である。今の理論形式では、多熱浴という外力・'環境'のnon-trivialな構造なしに非平衡性は考えにくいし、例えば、地球上での自然現象における非平衡性の大部分が、'窮極的に'は'外界'としての太陽の低エントロピーのエネルギー供給に基づくということも事実である。しかし、この論法だと、環境そのものの非平衡性は、何に由来するのだろうか？それは、'環境の環境の非平衡性に求められ、…'となると、どこまでも閉じない循環論法になる。確かに、この宇宙が'窮極的に'は開放系だとすれば、'この位の循環論法'は、'閉じない'ことのみを以て責められるべきではない。ただ気になることは、元々、熱浴同士の間の相互作用を無視して'2つの'＜熱浴の温度＞T_1, T_2を持ち出したのであり、熱浴間相互作用も取り入れると《3体問題→n体問題→…》となって、恐らくは熱浴の問題そのものが'解けなくなる'はずなのに、それを忘れ'勝手に'持込んだ《近似》の根拠を無視して、'環境'＝'窮極要因'だとするその外挿の仕方である。本来、'外力'、'熱浴'、という見方は、宇宙の普遍的連関を《それ自身では加速度運動しない質点に'外から'働いて加速度を生ずるもの》として切り出したNewton力学における'外力'概念の、非平衡統計熱力学レベルでのリバイバル版であり、過渡的な便宜的概念と見るべきではなかろうか？もしこの'多熱浴'概念の近似性・条件的性格を正しく'思い出す'ならば、近似の精度を上げることはとりもなおさず、非平衡定常性を成り立たしめた条件の破れを記述の中に取戻すことに他ならない。それによって、今まで定常的だと見做されてきた安定構造は揺り動かされて運動を再開し、別の安定構造への移行の過程＝構造移行過程が始まることになるだろう。
こうして見ると、非平衡的秩序へ向っての起動因も不可逆性の起源も、一方的に系の外に求めるべきではなく、実は、対象系も環境も含めた自然そのもの内に元々内在していたもの、ということになりそうである。もしそうならば、'時間の矢'は最初から自然自身の中で決定されていたはずであり、不可逆性・'時間の矢'の'謎'は、不可逆・非平衡・構造形成的な自然［～平衡からの離脱における第2法則］に、可逆・平衡・静止構造的な物差［＝反復的力学法則・定常的状態概念・平衡への回帰としての第2法則・可逆的時間］を我々が'無理矢理'当てがったために生じた錯覚だという可能性がある。そうだすると、《可逆なBeingから如何にして不可逆なBecomingが出て来るか？》という問いは、それ自体初めから転倒した問題の立て方だったことにもなりうる。或いは、それは、可逆的・反復的・静的なBeingを記述の基準系として、不可逆的・非反復的・動的なBecomingへ漸近的にアプローチしていくより他に方法のない、人間の科学的認識の本性に由来する不可避的転倒というべきか？もし、自然が本来それ自身でBecomingの不可逆過程だとするならば、解くべき本当の'謎'は、この転倒を引起こすメカニズムの問題、もっと物理に即して一般化するなら、《自然の絶えざる非平衡・不可逆・不安定なBecomingの運動の中から、如何にして、相対的に平衡・可逆・安定なBeingのシステム・高次階層構造が、次々と展開・形成され得るのか》という問題にその焦点が移ることになるだろう。科学は、変転窮まりないこの自然の中から'永遠不変'の真理を取り出し、それによって'時間の矢の謎'を解こうと試みてきた。しかし、その

‘答’の中味とは、実はこの‘時間の矢の謎’に答えることではなく、‘時間の矢’を前提しそれに沿うてのBeingsの生成を辿ること、即ち《どういう運動の中から、どんな構造が、どのように形成されるか》という移行のメカニズムの解明を通じて、‘可逆的Beings生成の秘密’にこそ迫るものだと言うべきではないだろうか？――丁度第２法則において、散逸性・不可逆性と可逆性・構造形成の‘逆向き’運動が、‘その意に反して’背中合せに貼り合わされていたのとそっくり同じように。この‘後ろ向きの前進’を自然な向きに正す時がひょっとするともうすぐそこに来ているのかもしれない。ミクロからマクロへの階層上昇において解明を要する重要な問題はまだまだ尽きないが、紙数も随分費やしているので、ひとまずこの辺で区切りとしたい。

謝辞　豊田利幸先生には、この研究会の出発の時点から数々の貴重な御指導・御助言・暖かいお励ましを頂き、この原稿についても有益な御意見をお寄せ頂きました。心よりお礼申上げる次第です。第２節での合成系($\mathcal{B}, \beta_i$)を導入するアイディアは、'87年2～3月に来日したProf.J.Bellissardに負うものであり、同氏からの労を厭わぬ御教示・御議論とencouragement、enthusiasmに対して心から感謝します。エントロピー生成の問題に筆者の眼を向けさせて下さった長谷川　洋・一柳正和両氏や、本研究会のために報告を御準備下さったすべての方々には、多くの有益な視点を学ばせて頂いたことに対し心から感謝の意を表します。とりわけ、van Hove limitに関する問題整理については一柳正和氏の報告、超準解析に関しては小澤正直氏との議論に多くを負っており、エントロピーと量子情報理論については広田　修・大矢雅則両氏の報告から大きな刺激を受けました。

一文献一

[1] I.プリゴジン：『存在から発展へ』（みすず書房、1984）、その他。
[2] 小嶋　泉：場の量子論と非平衡・不可逆過程、1986年度基研研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告［物性研究47,no.5('87);素粒子論研究74,no.6('87)］
[3] [1]や、カチャルスキーーカラン：『生物物理学における非平衡の熱力学』（みすず書房、1975）、グランスドルフープリゴジン：『構造・安定性・ゆらぎ』（みすず書房、1977）、ニコリスープリゴジン：『散逸構造』（岩波書店、1980）、etc.
[4] 例えば、梅垣ー大矢：『量子論的エントロピー』（共立出版、1984）参照。
[5] 例えば、岩波講座現代物理学の基礎［第２版］第５巻、統計物理学；R.Kubo,M.Toda and N.Hashitsume：Statistical Physics(Springer-Verlag,1985).
[6] I.Ojima,H.Hasegawa and M.Ichiyanagi：J.Stat.Phys.50,633(1988).
[7] H.Spohn and J.L.Lebowitz：Adv.Chem.Phys.38,109(1978).
[8] M.Ichiyanagi：J.Phys.Soc.Japan 55,2093(1986).
[9] 例えば、簡単な紹介として、J.Avron and B.Simon,Commun.Math.Phys.82,101(1981)のAppendix 1 などが便利である。
[10] J.Bellissard：private communication。
[11] I.Ojima：Entropy Production and Nonequilibrium Stationarity in Quantum Dynamical Systems―Physical Meaning of van Hove Limit―,RIMS preprint,1988。

[12]van Hove limitについては、例えば、
E.B.Davies：Quantum Theory of Open Systems(Academic Press,1976)；
V.Gorini,A.Frigerio,M.Verri,A.Kossakowski and E.C.G.Sudarshan:Rep.Math.Phys. 13,149(1978); 一柳 正和：本研究会での報告。
[13]I.Ojima：preprint RIMS-532('86) 及び Proceedings of Internationl Symposium on Foundations of Quantum Mechanics(1987),pp.91-96。
[14]E.B.Davies:Comm.Math.Phys.39,91(1974)。
[15]例えば、斎藤正彦：超積と超準解析（東京図書、1976）。
[16]超準解析と量子化との係わりについては、小澤・小嶋：in preparation。
[17]例えば、O.Bratteli and D.W.B.Robinson,Operator Algebras and Quantum Statistical Mechnics,vol.I & II(Springer-Verlag,1979 & 1981)。
[18]例えば、岩波講座現代物理学の基礎［第２版］第２巻、古典物理学II。
[19]例えば、[2]或いは、小嶋 泉：'86年度原子核三者若手夏の学校講義録、等。
[20]確率過程の文脈では、Lebowitzが多熱浴開放系として定式化し、長谷川がその有用性に着目してレーザの記述に応用している。長谷川 洋：確率過程の方法による非平衡熱力学、1986年度基研研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告［物性研究47,no.5('87);素粒子論研究74,no.6('87)］、及びその末尾文献参照。
[21]ランダウ-リフシッツ：統計物理学、第１章・第２章。
[22]杉本大一郎：現代天文学講座７・星の進化と終末［恒星社厚生閣、1979］、第８章。

量子系の解の安定性の一般論

慶応大・理工　福　田　礼次郎

ラグランジアン$\mathscr{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$が与えられたとき，解の安定性はどのように決まるかを考える。ここで安定性とは時間 t についての安定性であって，時刻 t_0 で考えている解のごく近くにある別の解を考え，その解が $t\to+\infty$ でもとの解から大きく離れるときもともと考えた解は不安定，そうでなくずれがいつも小さいなら安定と呼ぶ(ここで考える解自身は，有限の領域にとどまっているものとして議論を進める)。

I　古典力学系では

作用を

$$I[q] = \int dt\, \mathscr{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

と書いたとき運動は

$$0 = \frac{\delta I[q]}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

でもとまる。その一つの解を $q_i(t) = q_i^{(0)}(t)$ として $q^{(0)}(t)$ の安定性を議論するため